I.C.A.R.E.

MATHS 1

(Durée 4 heures)

Le but de ce problème est d'étudier quelques propriétés des solutions de l'équation différentielle

$$(E_b) \qquad y'' + \frac{1}{x}y' + \left(1 - \frac{b^2}{x^2}\right)y = 0.$$

x désignera toujours un réel strictement positif, b une constante réelle positive ou nulle.

Dans les trois premières parties, $b \in \mathbb{R}-\mathbb{Z}$; dans la quatrième, on envisage le cas b = o ; enfin, dans la dernière partie, on établit un résultat concernant la solution proposée pour b = o.

Ces diverses parties sont donc liées dans une large mesure. Toutefois, les résultats indispensables pour poursuivre sont fournis par l'énoncé.

PREMIERE PARTIE

b est supposé être réel positif non entier $b \in \mathbb{R}^+ - \mathbb{N}$

On se propose de rechercher une solution particulière de E_b sous la forme $y = x^r \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ avec $a_0 \neq 0$, produit d'une puissance de x par une série entière, sur $]0,+\infty[$.

1. Montrer que, pour qu'une telle solution existe, il faut simultanément que :

$$(r = b \text{ ou } r = -b) ; \qquad (a_1 = 0) ; \qquad \forall n \in \mathbb{N} \quad a_{n+2} = \frac{-a_n}{(r+n+2)^2 - b^2}.$$

2. En déduire qu'une solution particulière de l'équation (E_b) est, alors :

$$y_b = x^b \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p \frac{a_0}{p!(b+1)(b+2)\ldots(b+p)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2p}$$

On précisera le domaine de convergence de y_b.

DEUXIEME PARTIE

$b \in \mathbb{R}^+ - \mathbb{N}$

1. En prenant pour r l'autre solution possible (r = -b)

   a. Donner une deuxième solution particulière y_{-b} de l'équation (E_b).

   b. Préciser l'intervalle de convergence de y_b et y_{-b}.

   c. Montrer que y_b et y_{-b} sont linéairement indépendantes.

2. En déduire la solution générale de E_b sur $]o, +\infty[$

TROISIEME PARTIE

On étudie le cas particulier $b = \frac{1}{2}$; x est un réel strictement positif

$$\left(E_{\frac{1}{2}}\right) \qquad y'' + \frac{1}{x}y' + \left(1 - \frac{1}{4x^2}\right)y = o$$

1. Ecrire $y_{\frac{1}{2}}$ sous la forme $y_{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{x}} f(x)$, f étant une fonction que l'on reconnaitra.

2. Ecrire $y_{-\frac{1}{2}}$ sous la forme $y_{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{x}} g(x)$, g étant une fonction de l'on reconnaitra.

3. En déduire la solution générale de $\left(E_{\frac{1}{2}}\right)$.

4. Montrer que $f : \begin{array}{c} \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R} \\ x \to \frac{\sin x}{\sqrt{x}} \end{array}$ est une solution de $\left(E_{\frac{1}{2}}\right)$.

   a. En remarquant que f est une fonction dont la courbe représentative reste enveloppée par les courbes $C_1 : y = \frac{1}{\sqrt{x}}$, $C_2 : y = -\frac{1}{\sqrt{x}}$, préciser les abscisses des points de contact entre la courbe et ces enveloppes.

   b. Préciser les points d'intersection avec x'o x.

   c. Esquisser la courbe représentative de f.

   d. Dire pourquoi de telles courbes paraissent importantes dans le domaine de la physique.

QUATRIEME PARTIE

On étudie le cas particulier b = o, x est un réel strictement positif pour toute cette partie.

1. Ecrire, sous la forme d'une série entière, une solution particulière $J_0(x)$ de l'équation, en choisissant $a_0 = 1$.

$$(E_0) \qquad xy'' + y' + xy = o$$

2. **a.** Montrer que $\cos[x \sin t] = \sum_{n=o}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} [x \sin t]^{2n}$

x et t désignant deux réels, x étant strictement positif.

b. Pour quelles valeurs de x cette série est-elle absolument convergente ?

3. Soit $I_n = \int_0^{2\pi} \sin^{2n} t \, dt$, $\quad n \in \mathbb{N}$

a. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad 2n\, I_n = (2n-1)\, I_{n-1}$

b. En déduire I_n

4. Montrer que $J_0(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \text{Cos}[x \sin t] \, dt$, x étant strictement positif.

CINQUIEME PARTIE

On considère E, l'ensemble des fonctions f : IR→ IR vérifiant l'ensemble des conditions suivantes :

- f est nulle pour x < o
- f continue sur $[o, +\infty[$
- f est d'ordre exponentiel à l'infini, c'est à dire $\forall \alpha \in \mathbb{R}^{+*} \quad \lim_{x \to +\infty} e^{-\alpha x} f(x) = o$

1. Montrer que E est un espace vectoriel sur IR.

2. Pour $f \in E$, on définit $F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-tx} f(t)\, dt$.

   a. Montrer que pour tout x réel strictement positif, $\int_0^{+\infty} e^{-tx} f(t)\, dt$ est absolument convergente.

   b. Soit $\mathcal{L} : E \to \mathcal{F}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$
   $f \to F$

   $\mathcal{F}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ désignant l'espace vectoriel des fonctions définies sur $\mathbb{R}^+$, à valeur dans $\mathbb{R}$.

   Montrer que $\mathcal{L}$ est une application linéaire.

3. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad g = \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
   $x \to 0$ si $x < 0$ $\quad x \to 0$ si $x < 0$
   $x \to x^n$ si $x \geq 0$ $\quad x \to \sin x$ si $x \geq 0$

   n désignant un entier naturel.

   Calculer $\mathcal{L}[f]$ et $\mathcal{L}[g]$.

4. f et g étant deux éléments de E, pour x réel positif fixé, on définit

$$(f * g)(x) = \int_0^x f(t) g(x-t)\, dt$$

   Montrer que $\mathcal{L}[f*g] = \mathcal{L}[f] \times \mathcal{L}[g]$

5. a. Donner un développement en série de $\left(1 + \frac{1}{p^2}\right)^{-1/2}$.

   b. En admettant que, $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ désignant une série entière, on peut écrire

$$\mathcal{L}\left[\sum_{n \geq 0} a_n x^n\right] = \sum_{n \geq 0} a_n \mathcal{L}\left[x^n\right]$$ sous réserve que cette dernière série converge,

   en déduire $\mathcal{L}(J_0)$.

6. Calculer $\mathcal{L}(J_0 * J_0)$.

7. En admettant que $\forall (f,g) \in E^2\ \mathcal{L}(f) = \mathcal{L}(g)$ implique $f = g$,

   En déduire $J_0 * J_0$.